Ex.9 讨论下列矩阵是否可以对角化.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad (2)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad (2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) 解法一: 计算矩阵的特征值. 由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3.$$

所以, 矩阵$A$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

当$\lambda=-1$ 时, 解齐次线性方程组$(-E-A)x=0$. 由

$$-E-A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以, 矩阵$A$ 只有一个线性无关的特征向量, 因此, 矩阵$A$ 不可对角化.

解法二. 计算矩阵的特征值. 由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3.$$

所以, 矩阵$A$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$. 因为

$$-E-A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以, $rank(-E-A)=2$, 于是, 齐次线性方程组$(-E-A)x=0$ 解空间的维数为$n-rank(-E-A)=3-2=1$, 所以, 矩阵$A$ 只有一个线性无关的特征向量, 因此, 矩阵$A$ 不可对角化.

(2) 解法一: 计算矩阵的特征值. 由于

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 4 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

所以, 矩阵$A$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$.

当$\lambda=2$ 时, 解齐次线性方程组$(2E-A)x=0$. 由

$$2E-A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

当$\lambda=-1$ 时, 解齐次线性方程组$(-E-A)x=0$. 由

$$-E-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & -1 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

由此可见, 矩阵$A$ 有三个线性无关的特征向量, 所以, 矩阵$A$ 可对角化.

解法二. 计算矩阵的特征值. 由于

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 4 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

所以, 矩阵$A$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$.

当$\lambda=2$ 时, 由

$$2E-A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可知, $rank(2E-A)=1$, 齐次线性方程组$(2E-A)x=0$ 解空间的维数为$n-rank(2E-A)=3-1=2$, 所以, 矩阵$A$ 有三个线性无关的特征向量, 因此, 矩阵$A$ 可对角化.

(3) 解: 计算矩阵的特征值. 由于

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda^2+\lambda-4).$$

所以, 矩阵$A$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_{3,4}=(-1\pm\sqrt{17})/2$.

当$\lambda=1$ 时, 由

$$E-A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可知, $rank(E-A)=3$, 齐次线性方程组$(E-A)x=0$ 解空间的维数为$n-rank(E-A)=4-3=1$, 所以, 矩阵$A$ 只有三个线性无关的特征向量, 因此, 矩阵$A$ 不可对角化.

注意结论：

**定理** $n$ 阶方阵$A$ 可对角化$\Leftrightarrow$ 存在$n$ 个线性无关的**向量** $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$

和$n$ 个数$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 使得$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$.

说明: 定理中的$n$ 个数$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 就是矩阵$A$ 的特征值, 向量$\alpha_i$ 就是对应于特征值$\lambda_i$ 的特征向量.

**定理** $n$ 阶方阵$A$ 可对角化$\Leftrightarrow$ $A$ 有$n$ 个线性无关的**特征向量**.

结论1. 对于**一般实矩阵** $A$,

(i) 属于不同特征值的特征向量是线性无关的;

(ii) 若$n$ 阶方阵$A$ 有$n$ 个不同特征值, 则$A$ 可对角化.

结论2. 对于**实对称矩阵** $A$,

(i) 属于不同特征值的特征向量必正交;

(ii) 实对称矩阵一定可以对角化.

**定理** 齐次线性方程组$\mathbf{A_{m\times n}x = 0}$ 的解空间的维数为$\mathbf{n - rank(A)}$.